J. 5055

UHC 354

SESSION 2003

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines - Cachan

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

Le problème et les deux exercices qui suivent sont totalement indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat.

Problème

Dans ce qui suit, **toutes** les variables aléatoires considérées sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Une variable aléatoire X (à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc) est dite symétrique si $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(X = -m)$ pour tout entier m.

Préliminaires

1. Si X prend la valeur 1 avec probabilité p et -1 avec probabilité $1-p$, donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que X soit symétrique.

2. Si X est symétrique telle que $|X|$ est d'espérance finie, prouver que $\mathbb{E}(X) = 0$.

3. Prouver que si X est symétrique alors 0 est une médiane de X, ce qui signifie que $\mathbb{P}(X > 0) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}(X \geq 0)$.

4. Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi alors $X - Y$ est symétrique.

5. Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et symétriques alors $X + Y$ est symétrique.

6. En déduire que plus généralement, si pour un entier $n \geq 2$, $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et symétriques alors leur somme S_n est symétrique.

Première Partie

Soit $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes et symétriques. Pour tout entier $k \in [1, n]$ on pose $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ et on se donne $x \geq 0$. On note de plus Ω_k l'événement $\{\max_{1 \leq j < k} S_j \leq x\} \cap \{S_k > x\}$ si $k \geq 2$ et Ω_1 l'événement $\{X_1 > x\}$.

Pour tout entier $k \in [1, n]$,

7. démontrer que
$$\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k \subseteq \{S_n > x\} \cap \Omega_k,$$

8. puis que
$$\mathbb{P}(\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(\Omega_k).$$

9. Prouver que

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \left\{ \max_{1\leq j\leq n} S_j > x \right\}.$$

10. En déduire l'inégalité dite de Paul Lévy

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j > x \right) \leq 2\mathbb{P}\left(S_n > x\right).$$

Deuxième Partie

On considère $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, symétriques et de même loi. On suppose que X_1^2 est d'espérance finie non nulle et on note $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}\left(X_1^2\right)}$. Comme dans la Première Partie, étant donné un nombre réel positif x, pour tout entier $k \in [1, n]$ on note $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, Ω_k l'événement $\{\max_{1\leq j<k} S_j \leq x, S_k > x\}$ si $k \geq 2$ et Ω_1 l'événement $\{X_1 > x\}$. Soit $y > 0$.

Pour tout entier $k \in [1, n]$,

11. démontrer que

$$\{S_n - S_k > 0\} \cap \Omega_k \supseteq \{S_n > x + y\} \cap \Omega_k \cap \{X_k \leq y\},$$

12. puis que

$$\mathbb{P}\left(\{S_n - S_k > 0\} \cap \Omega_k\right) \leq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\Omega_k\right).$$

13. En déduire que

$$\mathbb{P}\left(S_n > x + y\right) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_j > y\right) \leq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j > x \right).$$

14. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(X_1 > y\right) \leq y^{-2} \sum_{m\in\mathbb{N}, m>y} m^2 \mathbb{P}\left(X_1 = m\right).$$

15. En déduire que pour tout $\theta > 0$ on a

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_j > \theta\sqrt{n}\right) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

16. Justifier que pour tout nombre réel λ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n > \lambda\sigma\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left(-x^2/2\right) dx.$$

17. En utilisant l'inégalité de Paul Lévy et les évaluations précédentes, en conclure que pour tout nombre réel positif λ, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j > \lambda\sigma\sqrt{n} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left(-x^2/2\right) dx.$$

18. Lorsque λ est négatif, quel est le comportement de $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j > \lambda\sqrt{n}\right)$ quand n tend vers l'infini?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Pour tout entier non nul n, on note

$$I_n = \int_0^1 \left((1-x)\,e^x\right)^n dx.$$

19. Calculer I_1 et I_2.

On cherche à présent à déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini. Soit ϕ l'application définie sur $[0,1[$ par $\phi(0) = 1/2$ et, pour tout $x \in]0,1[$

$$\phi(x) = \frac{-x - \ln(1-x)}{x^2}.$$

20. Prouver que ϕ est une bijection croissante de $[0,1[$ sur $[1/2, +\infty[$.

21. Démontrer que

$$I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

22. Soit $\sigma \in]0,1[$. On pose

$$\delta = \phi^{-1}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

où ϕ^{-1} désigne la bijection croissante de $[1/2, +\infty[$ sur $[0,1[$, réciproque de ϕ. Démontrer que

$$I_n \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\delta\sqrt{n}/\sigma} \exp\left(-x^2/2\right) dx.$$

23. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2

Pour tout quadruplet $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on considère la matrice carrée d'ordre 4

$$M(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices $M(x,y,z,t)$ lorsque (x,y,z,t) parcourt $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ l'ensemble des marices carrées d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit enfin

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

25. Prouver que $(\mathbb{1}, I, J, K)$ est une base de $\mathbb{H}$.

26. Démontrer que $\mathbb{H}$ est strictement inclus dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

27. Pour toutes matrices A et B éléments de $\mathbb{H}$ vérifier que la matrice transposée ${}^t(AB)$ du produit AB est égale au produit BA .

28. Calculer les produits deux à deux des matrices $\mathbb{1}, I, J, K$ (prendre garde au fait que le produit matriciel n'est en général pas commutatif).

29. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication.

Pour tout élément $Q = x\mathbb{1} + yI + zJ + tK$ de $\mathbb{H}$, on note $\overline{Q}$ son élément dit conjugué $\overline{Q} = x\mathbb{1} - yI - zJ - tK$.

30. Démontrer que $Q\overline{Q} = N^2(Q)\,\mathbb{1}$, où $N(Q)$ est un nombre réel que l'on calculera en fonction des coordonnées de Q dans la base $(\mathbb{1}, I, J, K)$.

31. En déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse (pour la multiplication) appartenant à $\mathbb{H}$.

32. Prouver que si Q est un élément de $\mathbb{H}$ tel que $QQ' = Q'Q$ pour tout $Q' \in \mathbb{H}$, alors il existe un nombre réel x tel que $Q = x\mathbb{1}$.

33. En conclure que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif.